МАТЕМАТИКА

УДК 519.642.3

В.М. ДРАГИЛЕВ

О РЕДУКЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА К УРАВНЕНИЮ С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Рассматривается абстрактная некорректная обратная задача, сведенная к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Работа посвящена полуэвристической схеме априорных прогнозов, предназначенной для анализа возможностей реконструкции по данным об уровне входных погрешностей. Получены оценки, позволяющие, при подходящем соотношении между параметрами, проводить прогнозы, используя вырожденную аппроксимацию для ядра интегрального оператора.

Ключевые слова: *некорректные обратные задачи, интегральное уравнение Фредгольма первого рода, метод проекций, априорный прогноз.*

Введение. Пусть некорректная обратная задача сведена к интегральному уравнению (ИУ) Фредгольма первого рода с вполне непрерывным оператором

$$[Aq](x) \equiv \int_a^b G(x,s)q(s)\,ds = \tilde{u}(x), \qquad x \in [c,d], \tag{1}$$

где $\tilde{u}(x) = u(x) + \delta u(x)$, $u(x) = [Aq](x)$, $q(s) \in L_2[a,b]$ - искомая функция (оригинал); $\delta u(x)$ - погрешность исходных данных.

Ввиду некорректности задачи ее практической постановке должен предшествовать априорный анализ, состоящий, в идеале, из следующих двух этапов. В первую очередь желательно указать некий класс оригиналов, успешная реконструкция в том или ином смысле гарантируется при заданном уровне входных погрешностей. Затем, исходя из доступной информации об оригинале, следует выяснить его принадлежность к данному классу и сделать вывод о возможности (невозможности) успешной реконструкции.

Самостоятельный интерес представляет первый этап, который и будет в центре внимания. За недостатком априорной информации как первый, так и второй этап обычно осуществляется нестрогим образом, с привлечением неких качественных представлений. Простейшим средством априорного анализа служат численные эксперименты с имитацией погрешностей и модельными оригиналами. Другие приемы основаны на исследовании сингулярных чисел (СЧ) и числа обусловленности [1-4]. По ряду причин последний подход может быть наиболее эффективно реализован, когда оператор A является конечномерным, т.е.

$$G(x,s) = G_M(x,s) \equiv \sum_{m=1}^{M} \varphi_m(x)\psi_m(s). \tag{2}$$

Подходящая методика априорных прогнозов в основных чертах показана в статьях [2, 5] и для удобства будет далее изложена.

Для приложений интересен случай [2], когда ядро ИУ приближается к вырожденному, т.е.

$$G(x,s) = G_M(x,s) + G_r(x,s),$$

где $G_r(x,s)$ - остаточные члены, исчезающие в некотором пределе.

В процессе априорного анализа заманчиво рассмотреть ИУ с вырожденным ядром

$$[A_M q](x) \equiv \int_a^b G_M(x,s) q(s) ds = \tilde{u}(x), \qquad x \in [c,d], \tag{3}$$

где, как и в (1), $\tilde{u}(x) = u(x) + \delta u(x)$, $u(x) = [Aq](x)$, и провести анализ по той же схеме, что и в задаче (1), (2). При этом возникает вопрос, насколько правомерна редукция ИУ (1) к ИУ (3). С практической точки зрения она в какой-то мере уже будет оправдана, если только саму схему прогнозов удастся аккуратно распространить на ИУ (3). Цель настоящей работы - указать простое условие, при котором такое обобщение становится возможным.

Подчеркнем, что в основе развиваемой схемы лежат качественные гипотезы, не имеющие четкой математической формулировки. Естественно, что и модификацию этой схемы нельзя отнести к чисто математическим задачам; в конечном счете речь идет о том, чтобы придать СЧ некую разумную интерпретацию. Тем не менее основные соотношения, полученные ниже математическими средствами, показывают, что условие редукции слабо зависит от той неопределенности, которую вносит нестрогий характер отправных гипотез.

Обозначим: $A_r = A - A_M$. Тогда имеем: $u(x) = u_M(x) + \delta u_r(x)$, где $u_M(x) = [A_M q](x)$, $\delta u_r(x) = [A_r q](x)$; оба эти вклада неявно присутствуют в правых частях ИУ (1) и (3). Временно пренебрегая вторым вкладом, обратимся к вспомогательной идеализированной задаче (1), (2), записав ее в виде

$$[A_M q](x) = u_M(x) + \delta u(x), \qquad x \in [c,d]; \tag{4}$$

известной здесь считается только сумма $\tilde{u}(x) = u_M(x) + \delta u(x)$.

Сводка прежних результатов, относящихся к задаче (4). Выбрав ортонормированный базис $\{f_n(s)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[a,b]$, обобщенные решения ИУ (4) можно строить проекционным методом в виде

$$\tilde{q}_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \xi_n f_n(s), \qquad (N \le M). \tag{5}$$

Здесь коэффициенты ξ_n отыскиваются методом наименьших квадратов, т.е. минимизируют невязку ИУ в пространстве $L_2[c,d]$. В последующем контексте указанная процедура реконструкции может считаться чисто воображаемой (априорные прогнозы сводятся к расчету СЧ и их интерпретации). Подразумевается, что системы $\{\varphi_m(x)\}_{m=1}^{M}$ и $\{\psi_m(s)\}_{m=1}^{M}$ обладают линейной независимостью, а проекции функций $f_n(s)$, ($n = 1, 2, \ldots, M$) в линейную оболочку функций $\psi_m(s)$, ($m = 1, 2, \ldots, M$) образуют базис этого подпространства.

Обозначим: H_N - подпространство, натянутое на систему $\{f_n(s)\}_{n=1}^{N}$, $\bar{H}_N$ - его ортогональное дополнение до $L_2[a,b]$; P_N и

$\bar{P}_N = I - P_N$ - соответственно проекторы из $L_2[a,b]$ в H_N и $\bar{H}_N$, $B_{mn} = (f_m, A_M^* A_M f_n)_{L_2}$, B_N - эрмитова матрица с элементами $(1 \le m,n \le N)$; σ_n^N - СЧ матрицы B_N, упорядоченные по убыванию: $\sigma_1^N \ge \sigma_2^N \ge \ldots \ge \sigma_N^N$ (можно показать, что в наших условиях $\sigma_N^N > 0$); $C_N = \sigma_1^N / \sigma_N^N$ - число обусловленности матрицы B_N; $q_N(s) = P_N q(s)$; $q_N'(s)$ - решение (5) задачи (4) с $\delta u = 0$ в правой части. Отметим, что $q_N'(s) = q_N(s) + D_N \bar{P}_N q(s)$, где D_N - некий линейный оператор [5]. Для функций, определяемых на отрезках $[a,b]$ или $[c,d]$, символы $\|\cdot\|$ будут означать соответственно норму в $L_2[a,b]$ или $L_2[c,d]$.

Введем в рассмотрение относительные погрешности:

$$\Delta = \|\delta u\| / \|u_M\|,\ \eta_N = \|q - q_N\| / \|q\|,\ \eta_N' = \|q - q_N'\| / \|q\|,\ \eta_N'' = \|\tilde{q}_N - q_N'\| / \|q'\|,$$
$$\tilde{\eta}_N = \|\tilde{q}_N - q\| / \|q\|.$$

Погрешность решения (5) $\tilde{\eta}_N$ можно оценить при априорно заданных погрешностях η_N и Δ. В статье [5] получены оценки:

$$\tilde{\eta}_N \le \eta_N' + \eta_N'' + \eta_N' \eta_N''; \qquad (6)$$

$$\eta_N \le \eta_N' \le \sqrt{1 + \chi_N^2}\, \eta_N, \qquad (7)$$

где $\chi_N = \|D_N\|$.

Для погрешности η_N'' имеется оценка [6, 7]

$$\eta_N'' \le \gamma_N C_N \Delta, \qquad (8)$$

где $\gamma_N = \|u_M\| / \|u_N'\|$, $u_N' = A_M q_N'$. Фактор γ_N трактуется как функционал от $q(s)$. Отметим, что $\gamma_M = 1$ и $\gamma_N \ge 1$ при $N < M$ [7]. Число обусловленности C_N монотонно растет вместе с N в силу принципа промежуточности [8].

В канонической версии метода проекций базис образует собственные функции (СФ) эрмитова оператора $A_M^* A_M$, что делает метод регуляризующим [9] и дает оптимальные значения $\chi_N = 0$, $\eta_N' = \eta_N$ [5]. При ином выборе базиса, вообще говоря, $\eta_N' > \eta_N$, т.е. возникает особого рода добавочная погрешность. В связи с этим предполагается, что для всех $N \le M$ значения нормы χ_N меньше или порядка единицы. Согласно (7) при таком условии погрешности η_N' и η_N всегда сопоставимы, и тем самым эффективность проекционного метода сравнима с эффективностью регуляризующих схем. Волевой выбор базиса позволяет обойтись без исследования СФ, что особенно привлекательно в многопараметрических задачах. Попутно поясним смысл редукции ИУ (1) к ИУ (3): в канонической версии метода проекций она упрощает отыскание СЧ и СФ, а в обобщенной версии - оценивание нормы χ_N [5].

При помощи оценок (6)-(8) удается анализировать возможности реконструкции в рамках следующих упрощающих гипотез.

1) Предлагается пренебречь множителем γ_N в оценке (8) [2, 4]. Эвристическим основанием для этого служит тот факт, что функционал γ_N обращается в единицу на всех ненулевых оригиналах $q(s) \in H_N$ и непрерывен на каждом из таких элементов; вместе с тем при любой размерности решения N успешно восстанавливаться могут только оригиналы, близкие к функциям класса $q(s) \in H_N$.

2) При $C_N >> 1$ и при случайном характере погрешностей $\delta u(x)$ оценка (8) чаще всего будет многократно завышена даже без учета множителя γ_N. Утверждается, что максимальная размерность N, при которой погрешность η''_N обычно еще остается много меньшей единицы, может быть найдена по критерию [1, 2, 4]

$$N_{\max} \equiv \max_{1 \le N \le M} \{ N: \ C_N \Delta \le 1 \}. \qquad (9)$$

Высказывание о том, что погрешность η''_N скорее всего мала, является чисто качественным; получить оценку более точную, чем (8), можно только при наличии дополнительной априорной информации.

Согласно гипотезам 1) и 2) успешную реконструкцию допускают, как правило, те и только те оригиналы $q(s)$, которые при $N = N_{\max}$ адекватно приближаются своей проекцией $q_N(s)$; последнее предполагает, что $\eta_N << 1$. Учитывая оценки (6), (7), при $N = N_{\max}$ для этих оригиналов можно прогнозировать вероятное восстановление с погрешностью $\tilde{\eta}_N$ много меньшей единицы. При такой погрешности качество изображения $\tilde{q}_N(s)$ будет примерно соответствовать качеству аппроксимации $q_N(s)$.

Тем самым создается возможность делать прогнозы, исходя из заданного уровня входных погрешностей Δ и вычисляемого конечного набора величин - значений числа обусловленности.

Оценка погрешности решения в задаче (3). Пусть теперь (5) есть построенное тем же способом обобщенное решение ИУ (3). Последнее отличается от ИУ (4) только дополнительным вкладом $\delta u_r(x)$ в правой части. Рассматривая этот вклад как добавку к функции $\delta u(x)$ и применив неравенство треугольника $\|\delta u + \delta u_r\| \le \|\delta u\| + \|\delta u_r\|$, при помощи оценок (6)-(8) получим такую же систему оценок с тем отличием, что в правой части неравенства (6) добавляется слагаемое $\overline{\eta}_N = (1 + \eta'_N)\gamma_N C_N \Delta_r$, где $\Delta_r = \|\delta u_r\| / \|u_M\|$. Функция $q'_N(s)$, как и прежде, минимизирует невязку ИУ (4) при $\delta u = 0$. Из ее сингулярного разложения найдем, что $\sigma_N^N \|q'_N\| \le \|u_M\|$. Кроме того, имеем $\|\delta u_r\| \le \|A_r\| \|q\|$. Следовательно, $\Delta_r \le C_N (\|A_r\| / \sigma_1^N) \cdot (\|q\| / \|q'_N\|)$. Здесь, по принципу промежуточности, $\sigma_1^N \ge \sigma_1^1$. Обозначим: $\beta_N = \|q\| / \|q'_N\|$, $\alpha' \ge \|A_r\|$ - произвольная оценка сверху для нормы $\|A_r\|$, $\alpha'' = \sigma_1^1$, $\alpha = \alpha' / \alpha''$. (Отметим, что число $\alpha'' = [(f_1, A_M^* A_M f_1)_{L_2}]^{1/2}$ есть оценка снизу для нормы $\|A_M\|$).

Из предыдущего вытекает набор неравенств

$$\Delta_r \le \alpha \beta_N C_N, \qquad (N = 1,2,\ldots,M). \qquad (10)$$

Введем дополнительное обозначение $\bar{\Delta} = \sqrt{\alpha}$. Полагая в (10) $N = N_{\max}$ и учитывая, что при этом $\Delta C_N \le 1$, получим:

$$\Delta_r \le \bar{\Delta}^2 \beta_N C_N \le \bar{\Delta}^2 \beta_N / \Delta = \beta_N (\bar{\Delta}/\Delta)^2 \Delta, \quad (N = N_{\max}). \qquad (11)$$

Наконец, используя (11), приходим к оценке

$$\bar{\eta}_N \le (1+\eta'_N)\gamma_N \beta_N (\bar{\Delta}/\Delta)^2, \qquad (N = N_{\max}). \qquad (12)$$

Интерпретация оценок (11), (12). В рамках принятых допущений первые три сомножителя в (12) сопоставимы с единицей для всех оригиналов, для которых может прогнозироваться успешная реконструкция. Тем самым при соотношении $\Delta >> \bar{\Delta}$ вся схема прогнозов дословно переносится на ИУ (3) с тем отличием, что в оценке для $\tilde{\eta}_N$ (6) появляется добавочный член $\bar{\eta}_N << 1$. Практически достаточно, чтобы отношение $\Delta / \bar{\Delta}$ было больше 10; тогда предполагаемые значения $\bar{\eta}_N$ будут составлять порядка 0.01 и менее, что вполне отвечает качественным представлениям о малой погрешности в духе гипотезы 2).

Сделанный вывод нуждается, правда, в одном уточнении. Дело в том, что относительная погрешность исходных данных до сих пор была определена как $\Delta = \|\delta u\| / \|u_M\|$, в реальности же приходится иметь дело с априорно заданной величиной $\Delta = \|\delta u\| / \|u\|$. Это обстоятельство будет несущественным, если только, согласно априорной информации, $\|\delta u\| << \|u\|$. В самом деле, при соотношениях $\Delta >> \bar{\Delta}$, $\eta_N << 1$ из (11) находим, что $\|\delta u_r\| << \|\delta u\|$; отсюда при $\|\delta u\| << \|u\|$ следует, что $\|u_M\| \approx \|u\|$. Небольшие различия в определении Δ могут влиять на вычисляемую по критерию (9) размерность $N_{\max}$. Это, однако, не играет роли, так как сам критерий является приблизительным, а критическое значение $C_N \Delta = 1$ - отчасти условным. Применение критерия становится наиболее содержательным, когда число обусловленности быстро возрастает, т.е. $C_{N+1} >> C_N$ в некотором интервале значений N, в пределах которого находится $N_{\max}$ [4]. В таких условиях даже большие (скажем, на $\pm$50 %) вариации Δ способны изменить значение $N_{\max}$ не более чем на ± 1.

Неопределенность, возникающую при формулировке критерия (9), можно выразить математически, заменив условие $C_N \Delta \le 1$ на $C_N \Delta \le \eta$, где η - константа, регулирующая максимальные значения погрешности η''_N. Тогда неравенства (11), (12) останутся верными с точностью до замены $\bar{\Delta} = \sqrt{\alpha}$ на $\bar{\Delta} = \sqrt{\eta\alpha}$ и добавления множителя η в правой части (12). При $\eta < 1$ условие $\Delta >> \bar{\Delta}$ только лишь ослабляется. Задавать же большие значения $\eta >> 1$ на практике не имело бы смысла: при таком выборе априорные оценки не могут гарантировать даже отдаленного качественного сходства между решением (5) и проекцией $q_N(s)$. При отказе от гипотезы 1), т.е. при учете фактора γ_N, возникнут конкретные числовые ограниче-

ния на погрешность η_N, при которых значения γ_N еще остаются близкими к единице. Это, однако, никак не отражается на применимости условия $\Delta >> \overline{\Delta}$.

Анализ частного случая. Ясно, что редукция ИУ (1) к ИУ (3) в целом ухудшает возможности реконструкции; результаты настоящей работы не позволяют строгим образом контролировать эти последствия. Укажем все же способ для косвенного контроля, предварительно рассмотрев следующий пример.

Пусть $\{\Psi_m(s)\}_{m=1}^{\infty}$ есть ортонормированный набор СФ оператора A^*A, отвечающих его СЧ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots$, P_M' - проектор в линейную оболочку СФ $\{\Psi_m(s)\}_{m=1}^{M}$. Предположим, что $\sigma_{M+1}/\sigma_M << \sigma_M/\sigma_1$, т.е. в спектре СЧ имеется резкий скачок при $m = M$. Выберем аппроксимацию интегрального оператора в виде $A_M = AP_M'$; для этого в формуле (2) положим $\psi_m(s) = \Psi_m(s)$, $\varphi_m(x) = [A\Psi_m](x)$. В качестве базиса $\{f_n(s)\}_{n=1}^{M}$ выберем систему СФ $\{\Psi_m(s)\}_{m=1}^{M}$. В этих условиях имеем: $\|A_M\| = \sigma_1$, $\|A_r\| = \sigma_{M+1}$, $C_M = \sigma_1/\sigma_M$, $\alpha'' = \|A_M\|$. Заметим, что $\sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\sigma_{M+1}/\sigma_1}$, или, что равносильно, $\overline{\Delta} \geq \Delta'/\varepsilon$, где $\Delta' = \sigma_{M+1}/\sigma_M$, $\varepsilon^2 = \sigma_1\sigma_{M+1}/\sigma_M^2 << 1$. Условие $\Delta >> \overline{\Delta}$ выделяет область погрешностей $\Delta >> \Delta'$. Легко видеть, что в этой области при любом методе решения ИУ (1) исключается успешное восстановление каких-либо иных оригиналов, кроме функций двух типов: таких, у которых в разложении по базису $\{\Psi_m(s)\}_{m=1}^{\infty}$ преобладают члены с $m \leq M$, и таких, у которых все эти члены подавлены. Функции первого типа допускают реконструкцию на основе ИУ (3) и улавливаются при априорных прогнозах. При решении ИУ (1) методом А.Н. Тихонова [10] возможна реконструкция также и функций второго типа. Но если, при всех прежних условиях, система СФ подходящим образом упорядочена (например, по возрастающему числу нулей или экстремумов), то функции второго типа не будут представлять большого прикладного интереса.

Далее для простоты положим $\alpha' = \|A_r\|$. Тогда $\overline{\Delta} = \sqrt{\sigma_{M+1}/\sigma_1} = \varepsilon / C_M$, так что $\overline{\Delta} << 1/C_M$. При этом условия $\overline{\Delta} << \Delta < 1/C_M$ совместны, и в таком диапазоне погрешностей критерий (9) дает $N_{\max} = M$.

В общем же случае, т.е. когда $A_M \neq AP_M'$, условие $\Delta >> \overline{\Delta}$ приводит к ограничению $N_{\max} \leq \overline{N}$, где $\overline{N} = \max_{1 \leq N \leq M}\left\{N : C_N\,\overline{\Delta} < 1\right\}$. Если окажется, что $\overline{N} < M$, то это может означать, что аппроксимация интегрального оператора неудачна (либо выбранная оценка α' для нормы $\|A_r\|$ недостаточно точна). Если же $\overline{N} = M$, то тогда можно надеяться, что при $\Delta >> \overline{\Delta}$ вся ситуация сходна с рассмотренным примером. А именно: редукция ИУ исключает восстановление функций класса $q(s) \in \overline{H}_M$ и близких по норме, но не оказывает большого влияния на восстановление функций

класса $q(s) \in H_м$ и близких по норме; реконструкция же всех остальных функций объективно затруднена.

Замечания. Фигурировавший в рассуждениях проекционный алгоритм с выбором N по критерию (9) не столь эффективен, как метод А.Н. Тихонова с апостериорным выбором параметра регуляризации (тем более, что последний метод не требует и редукции ИУ). Использовать такой алгоритм непосредственно для решения обратной задачи целесообразно только лишь в специальных случаях при наличии подходящей априорной информации. Тем не менее, априорные прогнозы дают представление также и о возможностях других методов применительно к восстановлению функций класса $q(s) \in H_м$ и близких по норме. Это высказывание подкрепляется как модельными примерами [2], так и качественными соображениями. Его краткая аргументация сводится к тому, что даже при волевом выборе базиса СЧ σ_n^N имеют обычный смысл: они выступают весовыми коэффициентами, с которыми вклады от ортогональных проекций $(f_n, q)_{L_2} f_n(s)$, ($n = 1,2,\ldots,N$) входят в правую часть ИУ (4).

Если исходные данные $\tilde{u}(x)$ задаются в виде J - мерного массива значений в неких опорных точках x_j, то тогда операторы A, A_M удобно рассматривать как действующие из $L_2[a,b]$ в R^J, соответствующим образом переопределив нормы и операцию эрмитова сопряжения.

Выводы. Условие, делающее целесообразным редукцию интегрального уравнения первого рода к уравнению с вырожденным ядром, получено в форме ограничения снизу на уровень входных погрешностей. При таком условии класс оригиналов, успешное восстановление которых может прогнозироваться в рамках рассмотренной схемы на основе редукции, близок к аналогичному классу оригиналов, допускающих успешную реконструкцию в идеализированной обратной задаче с вырожденным ядром.

Библиографический список

1. Бобровницкий Ю.И. Задача восстановления поля в структурной интенсиметрии: постановка, свойства, численные аспекты //Акустический журнал – 1994. – Т. 40. – № 3. – С. 367-376.

2. Ватульян А.О., Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Восстановление динамических контактных напряжений в упругом слое по смещениям его свободной поверхности // Акустический журнал. – 2001. –Т. 47. – № 6. – С. 829-834.

3. Ватульян А.О. К исследованию граничных обратных задач в теории упругости // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки: Спецвыпуск. – 2001.– С. 31-35.

4. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Об оптимальном выборе дискретного параметра регуляризации в обратной граничной задаче для упругих тел // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Математическое моделирование: Спецвыпуск. – 2001. – С. 61-63.

5. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. О применении метода проекций в обратной граничной задаче для упругого слоя // Вестник ДГТУ. – Т.4. – № 3. – 2004. – С. 282-289.

6. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

7. Драгилев В.М., Драгилева Л.Л. Некоторые оценки погрешности в методе проекций для интегральных уравнений первого рода с вырожденным ядром // Вестник ДГТУ. – Т. 6. – № 1. – 2006. – С. 3-9.
8. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. – М.: Наука, 1979. – 381 с.
9. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 206 с.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.

Материал поступил в редакцию 20.03.06.

V.M. DRAGILEV

ON THE INTEGRAL EQUATION OF THE FIRST KIND REDUCTION TO THE EQUATION WITH A DEGENERATE KERNEL

An abstract ill-posed inverse problem reduced to the integral Fredgholm equation of the first kind is considered. The paper is devoted to the semi-heuristic scheme of the a priori predictions destined for the analysis of the reconstruction possibilities from the given level of the initial data errors. The upper bounds are derived which admit, in the case of the appropriate relation between the parameters, to carry out the pre-dictions using the degenerate approximation for the kernel of the integral operator.

ДРАГИЛЕВ Владимир Михайлович (р. 1955), доцент кафедры математики ДГТУ, кандидат физико-математических наук. Окончил РГУ (1978).
Научные интересы: линейная теория волн, некорректные задачи математической физики.
Автор 26 научных работ.